Факултет за дипломатију и безбедност Београд

А. Програм за полагање пријемног испита из математике

1. Логика и скупови. Релације и функције .Скупови бројева.Пропорционалност
   1.1. Искази и логике операције
   1.2. Скупови
   1.3. Релације
   1.4. Функције
   1.5. Реални бројеви
   1.6. Комплексни бројеви
   1.7. Пропорционалност

2. Полиноми. Рационални алгебарски изрази
   2.1. Полиноми
   2.2. Рационални алгебарски изрази

3. Линеарне једначине и системи линеарних једначина. Линеарне Неједначине. Линеарна функција
   3.1. Линеарна једначина
   3.2. Системи линеарних једначина
   3.3. Линеарне неједначине
   3.4 Линеарна функција

4. Квадратне једначине и неједначине. Квадратна функција
   4.1. Квадратне једначине
   4.2. Квадратне неједначине
   4.3. Квадратна функција

5. Експоненцијална функција. Експоненцијалне једначине и неједначине. Логаритам. Логаритамска функција. Логаритамске једначине и неједначине
   5.1. Експоненцијална функција
   5.2. Експоненцијалне једначине
   5.3. Експоненцијалне неједначине.
   5.4. Логаритам
   5.5. Логаритамска функција
   5.6. Логаритамске једначине
   5.7. Логаритамске неједначине

6. Тригонометрија: Основни појмови и основни тригонометријски идентитети. Трансформације тригонометријских функција. Тригонометријске једначине
   6.1. Угао. Уопштење појма угла и мерење угла
   6.2. Тригонометријске функције оштрог и произвољног угла
   6.3. Основни тригонометријски идентитети. Адиционе формуле
   6.4. Трансформација збира тригонометријских функција у производ и обрнуто

6.5. Тригонометријских функција
6. 6 Тригонометријске једначине и неједначине
6.7. Примена тригонометрије у планиметрији и стереометрији. Површина троугла. Синусна и косинусна теорема. Тригонометријски облик комплексног броја

7. Планиметрија и стереометрија
7.1. Геометрија: троугла, четвороугла, многоугла и круга
7.2. Полиедри: Призма. Пирамида. Зарубљена пирамида
7.3. Обртна тела: Ваљак.Купа Зарубњена купа. Сфера и лопта

8. Аналитичка геометрија у равни
8.1. Растојање између тачака. Подела дужи у датом односу. Површина троугла
8.2. Права у равни
8.3. Кружница (кружна линија, круг)
8.4. Елипса
8.5. Хипербола
8.6. Парабола

9. Биномни образац. Елементи комбинаторике
9.1. Биномни коефицијенти и биномни образац
9.2. Елементи комбинаторике

10. Реални низови. Аритметички и геометријски низ. Функције
10.1. Реални низови
10.2. Аритметички низ
10.3. Геометријски низ
10.4. Испитивање тока и графика функције
10.5. Гранична вредност и непрекидност функције
10.6. Извод функције и његова примена

Б. Литература за спремање програма пријемног испита из математике

1. Ж. Ивановић , С. Огњановић: Математика 1,
Збирка решених задатака за I разред гимназија и техничких школа, "Круг", Београд 1995.
2. Ж. Ивановић, С. Огњановић: Математика 2,
Збирка решених задатака за II разред гимназија и техничких школа, "Круг", Београд 1997.
3. С. Огwановић, Ж. Ивановић, Л. Милин: Математика 3,
Збирка решених задатака за III разред гимназија и техничких школа, "Круг", Београд 1992.
4. С. Огwановић, Ж. Ивановић: Математика 4,
Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа, »Круг«, Београд 1999.
5. В.Богославов: Збирка решених задатака из математике 1,
Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

6. В.Богославов: Збирка решених задатака из математике 2,
Завод за уџбенике и наставна средства, Београд
7. В.Богославов: Збирка решених задатака из математике 3,
Завод за уџбенике и наставна средства, Београд
8. В.Богославов: Збирка решених задатака из математике 4,
Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

В. Пример једног теста пријемног испита из математик

1. а) Израчунати $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}$.

б) Упростити $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}$.

2. Решити једначине:

а) $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}$, б) $\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)$

3. Решити тригонометријску једначину

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

4. Решити неједначину $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}$.

5. Тачка $A(3,0)$ полови тетиву кружнице $x^2+y^2-4x+2y+1=0$. Одредити једначину праве којој припада тетива наведене кружнице.

6. Странице троугла су $a=13$, $b=14$ и $c=15$. Две од њих (a и b) су тангенте круга чији је центар на трећој страници. Одредити полупречник круга.

7. Изводница праве зарубљене купе је $s=5cm$, а полупречници основа су $R=5cm$ и $r=2cm$. У купу је уписана правилна зарубљена четворострана пирамида тако да је доња основа пирамиде уписана у доњу основу купе, а горња основа пирамиде у горњу основу купе. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.

8. Одредити дужине страница троугла ако се зна да оне образују аритметичку прогресију са разликом $d=4$ и ако један унутрашњи угао троугла има $120°$.

9. Дата је функција $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-1,1) \\ \frac{1}{2}\ln x^2, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty). \end{cases}$

а) Скицирати график функције f.

б) У зависности од реалног параметра a, одредити број реалних решења једначине $|f(x)|=a$.

10. Израчунати граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log_2 2+\log_2 4+\cdots+\log_2 2^n}{n^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Г. Решење примера једног теста пријемног испита из математике

1. а) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}$ =

$$=\left(\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left[3\left(\sqrt{6}-1\right)+2\left(\sqrt{6}+2\right)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115.$$

б) $$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(a-b)}=$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)-a^3+b^3}{ab(a-b)}=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3-a^3+b^3}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{ab(b-a)}{ab(a-b)}=-1,$$ уз услов $a\neq 0, b\neq 0$ и $a\neq b$.

2. а) Ако дату једначину помножимо са $NZS(2,3,4,6)$, тј. са 12, добијамо:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)+3(3x-1)=4(2x-4)+2(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x-9=10x-14\Leftrightarrow 5x=-5\Leftrightarrow x=-1.$$

б) Ако уведемо смену $x^2-4x=t$, добијамо да је

$$\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge t^2+7t+12=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge\left(t=-3\vee t=-4\right)\Leftrightarrow x^2-4x=-3\vee x^2-4x=-4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\vee x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=3\vee x=1\vee x=2.$$

3. Користећи идентитете:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),$$
$$a^4-a^2b^2+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2,$$
$2\sin x\cos x=\sin 2x$ и
$$\sin^2 x=1-\cos^2 x,$$
трансформишимо леву страну једначине на следећи начин:

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3=$$
$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)=$$
$$=1\cdot\left[\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-3\cos^2 x\sin^2 x\right]=1-3\cdot\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4}=$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right).$$

Дата једначина сада има облик $\quad 1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2},$ одакле се сређивањем добија еквивалентна једначина, односно $2\cos^2 2x-5\cos 2x+2=0$. Увођењем смене $\cos 2x=t$ добија се једначина $2t^2-5t+2=0$, чија су решења $t=2$ или $t=\frac{1}{2}$. Једначина $\cos 2x=2$ је немогућа, а једначина $\cos 2x=\frac{1}{2}$ има решења $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

4. Неједначина $log_3(3-x) < log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{4}$ има смисла ако је $3-x>0$ и $\frac{x+1}{4}>0$, односно ако је $x \in (-1,3)$. Како је $log_{\frac{1}{x}} a = -log_x a$ биће

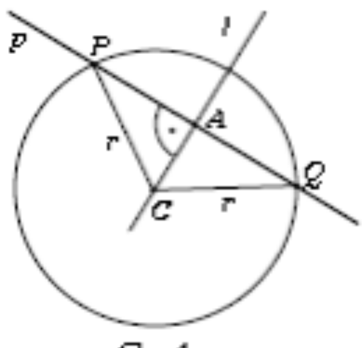
$$log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{4} = -log_3 \frac{x+1}{4} = log_3 \left(\frac{x+1}{4}\right)^{-1} = log_3 \frac{4}{x+1}.$$

Основа логаритма је већа од 1 , па је логаритамска функција растућа , а неједначина $log_3(3-x) < log_3 \frac{4}{x+1}$ се своди на неједначину $3-x<\frac{4}{x+1}$. Одавде добијамо да је $3-x-\frac{4}{x+1}<0$, односно $\frac{x^2-2x+1}{x+1}>0$ или $\frac{(x-1)^2}{x+1}>0$. Решења последње неједначине су сви бројеви већи од -1 и различити од 1. Ако узмемо у обзир да је $x \in (-1,3)$, коначно решење дате неједначине је $x \in (-1,1) \cup (1,3)$.

5. Канонски облик једначине круга је $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Центар круга је тачка $C(2,-1)$, а полупречник је $r=2$. Једначина праве l, одређене тачкама A и C, према формули $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, гласи $y-0=\frac{-1-0}{2-3}(x-3)$, односно $y=x-3$. Права l и права p, којој припада тетива, су ортогоналне што следи из подударности троуглова PAC и QAC (сл. 4).

Коефицијент правца праве l је $k_l=1$, а праве p је k_p. Из услова ортогоналности правих $k_p \cdot k_l = -1$ следи да је $k_p=-1$.

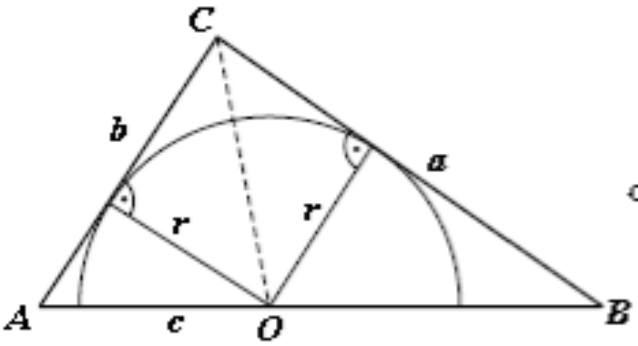
Једначина праве p којој припада тачка $A(3,0)$, са коефицијентом правца $k_p=-1$ је $y-0=-1\cdot(x-3)$, односно $y=-x+3$.



Сл.4

6. Како су познате све три странице троугла, његову површину можемо израчунати помоћу Хероновог обрасца

$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, при чему је $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла чије су странице a, b и c. У овом задатку је $s=21$, па је $P_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$. На основу услова задатка, површину троугла ABC можемо добити и као збир површина троуглова AOC и BOC, где је O центар уписаног полукруга(сл.5).



Сл.5

Дакле, $P_{ABC}=P_{AOC}+P_{BOC}$,

односно $P_{ABC}=\dfrac{br}{2}+\dfrac{ar}{2}$,

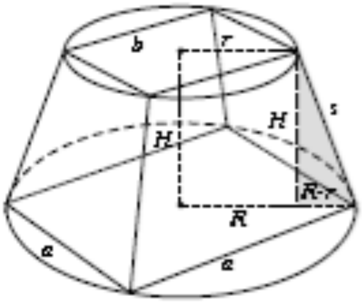
одакле је $\dfrac{r}{2}(13+14)=84$,

па је $r=\dfrac{56}{9}$.

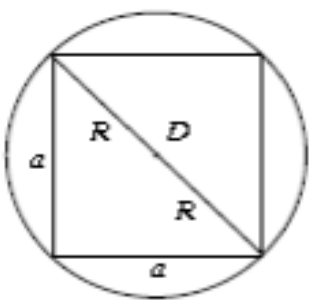
7. На основу Питагорине теореме (сл. 6) добијамо да је $H^2=s^2-(R-r)^2$, тј. $H=4$. Пречник доње основе зарубљене купе је $2R$, а како је и дијагонала D доње основе уписане зарубљене пирамиде такође једнака $2R$ (сл. 7), то ће бити $D=2R=10=a\sqrt{2}$, па је $a=5\sqrt{2}$. Слично се из $d=2r=4=b\sqrt{2}$ добија да је $b=2\sqrt{2}$.

Површине база зарубљене пирамиде су:

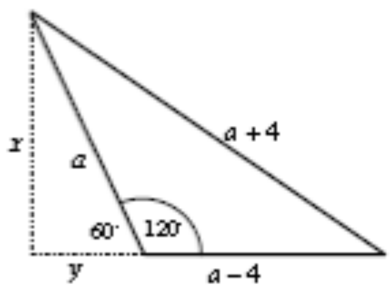
$B_1=a^2=50\,cm^2$ и $B_2=b^2=8\,cm^2$, па је запремина зарубљене пирамиде $V=\dfrac{H}{3}\left(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2\right)=\dfrac{4}{3}\left(50+\sqrt{50\cdot 8}+8\right)=104\,cm^3$.



Сл.6



Сл.7

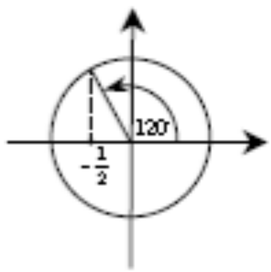


Сл.8

8. Нека су странице троугла $a, b=a-4$ и $c=a+4$. Са слике 8 види се да је $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $y=\frac{a}{2}$. Према Питагориној теорими је $x^2+(y+a-4)^2=(a+4)^2$, па је $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+a-4\right)^2=(a+4)^2$,

одакле се сређивањем добија једначина $2a^2-20a=0$, чија су решења $a=0$ или $a=10$. Дакле, странице троугла су $a=10$, $b=6$ и $c=14$.

До једначине $2a^2-20a=0$ смо могли доћи и на други начин. На основу косинусне теореме важи (сл. 9):
$(a+4)^2=a^2+(a-4)^2-2a(a-4)\cos 120^\circ$. Како је $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ (сл. 6), сређивањем претходне једначине добија се једначина $2a^2-20a=0$.



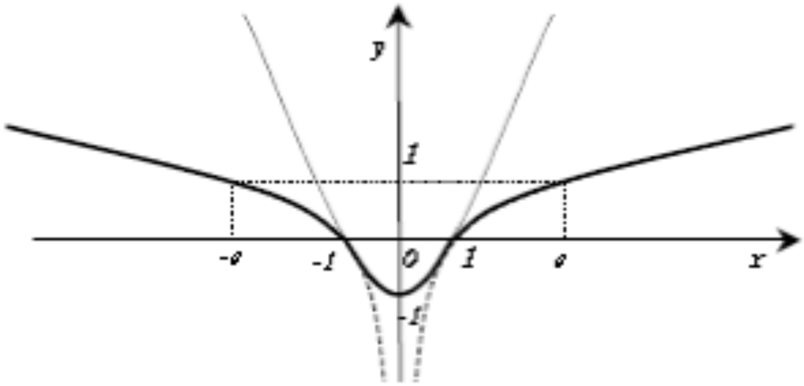
Сл. 9

9. Како је $\frac{1}{2}\ln x^2=\ln\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{x^2}=\ln|x|$ и $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,

функција f биће задата формулом

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x), & x\leq -1\\ x^2-1, & x\in(-1,1)\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}.$$

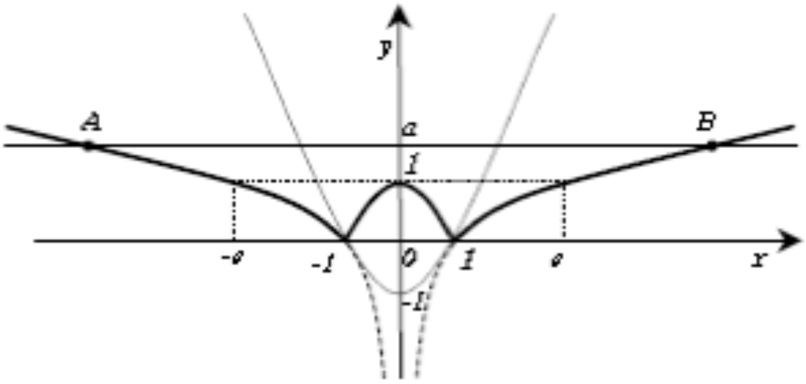
График функције f је приказан на слици 10.



Сл. 10

У истом координатном систему, на слици 11, представљени су графици функција

$$g(x)=a, a\in R \quad \text{и} \quad |f(x)|=\begin{cases} \ln(-x), & x\le -1 \\ -\left(x^2-1\right), & x\in(-1,1) \\ \ln x, & x\ge 1 \end{cases}.$$



Сл. 11

Апсцисе заједничких тачака графика функција $|f|$ и g представљаће решења дате једначине. На слици 8 то су тачке A и B. То значи,
за $a<0$ једначина нема решења, за $a\in(1,\infty)\cup\{0\}$ има 2 решења,
за $a=1$ једначина има 3 решења, за $a\in(0,1)$ једначина има 4 решења.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 2+\log_2 4+\ldots+\log_2 2^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2\left(2\cdot4\cdot8\cdot\ldots\cdot2^n\right)}{n^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2\left(2^{1+2+\ldots+n}\right)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\ldots+n)\log_2 2}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{3}$$